Es:
$$\begin{cases} y'' - y = e^x \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = \frac{e}{2} \end{cases}$$

omogenea $\quad y'' - y = 0$

pol. caratt. $\quad \lambda^2 - 1 = 0 \quad \lambda = \pm 1$

soluzione omogenea

$$y_o(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x}$$

Soluz. particolare.

$$f(x) = e^{x}$$

$\alpha = 1 \quad \beta = 0, \quad p \equiv 1 \quad grado(p) = 0$

$\alpha + i\beta = 1$ è radice del pol. caratt.

$$\boxed{m = 1}$$

$$\bar{y}(x) = x A e^{x}$$

$$\bar{y}'(x) = A e^{x} + A x e^{x}$$

$$\bar{y}''(x) = A e^{x} + A e^{x} + A x e^{x}$$

$$= 2 A e^{x} + A x e^{x}$$

sostituisco in $\bar{y}'' - \bar{y} = e^{x}$

$$\underbrace{2Ae^x + \cancel{Axe^x}}_{\bar{y}''} - \underbrace{\cancel{Axe^x}}_{\bar{y}} = e^x$$

$$2Ae^x = e^x \Rightarrow A = \frac{1}{2}.$$

$$\bar{y}(x) = \frac{1}{2} x e^x$$

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x} + \frac{1}{2} x e^{x}$$

soluzione generale dell'equazione completa.

Devo trovare c_1 e c_2.

$$y'(x) = -c_1 e^{-x} + c_2 e^{x} + \frac{1}{2} e^{x} + \frac{x}{2} e^{x}$$

$$y(1) = c_1 e^{-1} + c_2 e + \frac{e}{2}$$

$$y'(1) = -c_1 e^{-1} + c_2 e + \frac{e}{2} + \frac{e}{2}$$

$$\begin{cases} \dfrac{c_1}{e} + c_2 \cdot e + \dfrac{e}{2} = 0 \\ -\dfrac{c_1}{e} + c_2 e + e = \dfrac{e}{2} \end{cases}$$

sommo le equazioni

$$2 c_2 e + \frac{3}{2} e = \frac{e}{2}$$

$$2 c_2 e = -e \qquad c_2 = \frac{-e}{2e} = -\frac{1}{2}$$

sostituisco nella prima equazione

$$\frac{c_1}{e} - \cancel{\frac{e}{2}} + \cancel{\frac{e}{2}} = 0 \Rightarrow \frac{c_1}{e} = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

$$\Rightarrow c_1 = 0$$

$$\Rightarrow y(x) = -\frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}xe^x.$$

soluzione del problema di Cauchy.

Principio di sovrapposizione

$$y'' + ay' + by = f_1 + f_2$$

se $\bar{y}_1$ è soluzione particolare di

$$y'' + ay' + by = f_1$$

e se $\bar{y}_2$ è soluzione particolare

di $y'' + ay' + by = f_2$

allora $\bar{y} = \bar{y}_1 + \bar{y}_2$ è soluzione

di $y'' + a y' + b y = f_1 + f_2$.

Es:

$$y'' + y' - 2y = \underset{f_1}{x} \underbrace{- 3\sin x + \cos x}_{f_2}$$

omogenea

$$y'' + y' - 2y = 0$$

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

$$\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \begin{cases} \dfrac{-1+3}{2} = 1 \\[2ex] \dfrac{-1-3}{2} = -2 \end{cases}$$

$y_0(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{-2x}$ omogenea.

soluz. particolare di

$y'' + y' - 2y = x$

$f_1(x) = x$ $\alpha = 0, \beta = 0$

$\alpha + i\beta = 0$ non è radice

del polin. caratt. $\Rightarrow m = 0$.

$p(x) = x \Rightarrow \text{grado}(p) = 1$

$\Rightarrow \bar{y}_1(x) = Ax + B$ polinomio di grado 1.

$\bar{y}_1' = A$, $\bar{y}_1'' = 0$

sostituisco in

$y'' + y' - 2y = x$

$0 + A - 2(Ax + B) = x$

$A - 2B - 2Ax = x$

$$\begin{cases} A-2B=0 \\ -2A=1 \end{cases} \qquad A=-\frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2}-2B=0 \qquad -\frac{1}{2}=2B \quad B=-\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \bar{y}_1=-\frac{x}{2}-\frac{1}{4}$$

cerco soluz. particolare di

$$y'' + y' - 2y = -3\sin x + \cos x$$

$$f_2(x) = -3\sin x + \cos x$$

$\alpha = 0 \quad \beta = 1 \quad p(x) = -3 \quad q(x) = 1.$

$\text{grado}(p) = \text{grado}(q) = 0$

$\alpha + i\beta = i$ non è radice del polinom. caratt. $\Rightarrow m = 0.$

$$\Rightarrow \bar{y}_2(x) = A\cos x + B\sin x$$

$$\bar{y}_2' = -A\sin x + B\cos x$$

$$\bar{y}_2'' = -A\cos x - B\sin x$$

sostituisco

$$-A\cos x - B\sin x + (-A\sin x + B\cos x) - 2(A\cos x + B\sin x) = -3\sin x + \cos x$$

$$\begin{cases} -3A + B = 1 \\ -3B - A = -3 \end{cases} \qquad \begin{cases} B = 1 + 3A \\ -3(1+3A) - A = -3 \end{cases}$$

$$\cancel{-3} - 9A - A = \cancel{-3} \Rightarrow A = 0$$

$$B = 1.$$

$$\bar{y}_2 = \sin x$$

soluzione completa

$$y_0 + \bar{y}_1 + \bar{y}_2 =$$

$$= c_1 e^{x} + c_2 e^{-2x} - \frac{x}{2} - \frac{1}{4} + \sin x$$